

Modos de Mathieu: percurso histórico de um “novo feixe”

Mathieu’s modes: historical path of a “new beam”

J.P. Amaral^{*1}, C.H.M. Lima²

¹E.E.F.M. Prefeito Antônio Conserva Feitosa, Juazeiro do Norte, CE, Brasil.

²Universidade Federal do Acre, 22290-180, Rio Branco, AC, Brasil.

Recebido em 17 de março de 2024. Revisado em 30 de março de 2024. Aceito em 01 de abril de 2024.

Neste artigo mostramos uma análise abrangente e didaticamente detalhada sobre os feixes ópticos elípticos, abordando aspectos teóricos e experimentais. Inicia-se com a introdução sobre a importância do estudo dos fenômenos luminosos, destacando pesquisas sobre avanços tecnológicos e científicos proporcionados por feixes de luz. Nosso trabalho destaca a escassez de divulgação sobre os feixes ópticos de Mathieu, e a importância da produção de material técnico didático para a formação de estudantes de Física no Brasil. Parte-se das equações de Maxwell para derivar a equação de Helmholtz (EH), em seguida, procura-se uma solução para a EH em coordenadas elípticas cilíndricas, detalhado como se chega aos feixes de Mathieu. Explora-se a relação entre os feixes de Mathieu e os feixes Bessel, bem como a propagação não difrativa deles. Além disso, destaca-se a importância da singularidade de fase na determinação da ordem ou da carga topológica (CT) dos feixes e a limitação prática da distância de propagação dos feixes não difrativos. Por fim, menciona-se a geração experimental dos feixes de Mathieu por meio de configurações experimentais rústicas como por meio de hologramas.

Palavras-chave: Feixes não difrativos, Feixes de Mathieu, Luz modulada, Feixes elípticos.

In this article we show a comprehensive and didactically detailed analysis of elliptical optical beams, covering theoretical and experimental aspects. It begins with an introduction to the importance of studying light phenomena, highlighting research on technological and scientific advances provided by light beams. Our work highlights the scarcity of publicity about Mathieu’s optical beams, and the importance of producing technical teaching material for the training of Physics students in Brazil. We start from Maxwell’s equations to derive the Helmholtz equation, then look for a solution for the Helmholtz equation in cylindrical elliptical coordinates, detailing how to arrive at the Mathieu beams. The relationship between Mathieu beams and Bessel beams is explored, as well as their non-diffractive propagation. Furthermore, the importance of phase singularity in determining the order or topological charge of beams and the practical limitation of the propagation distance of non-diffractive beams are highlighted. Finally, the experimental generation of Mathieu beams is mentioned through rustic experimental setups such as holograms.

Keywords: Non-diffractive beams, Mathieu beams, Modulated light, Elliptical beams.

1. Introdução

O estudo dos fenômenos luminosos fornece informações valiosas sobre o mundo macroscópico e microscópico ao nosso redor e também permite gravar, armazenar e transmitir essas informações [1], soma-se a isso também o fato de ser possível usar a luz para aprisionar e manipular micropartículas.

Atualmente, o nível de conhecimento e de técnicas para manipulação da luz nos permite usá-la como ferramenta em diversos campos da ciência. Podemos citar como exemplo a descoberta do fenômeno de “pinçamento óptico” [1, 2], realizada no ano de 1969 por Arthur Ashkin et al., e laureado com o Prêmio Nobel de Física em 2018. Referências mais recentes sobre o tema podem ser encontradas em [2, 3].

Quando se fala em manipular a luz com o intuito de aplicá-la em outros ramos da ciência, não tem como não nos referirmos aos feixes ópticos [4], pois, do ponto de vista teórico, campos de luz modulada são representados por soluções da equação de Helmholtz (EH) escalar em um dado sistema de coordenadas conveniente.

Um fenômeno intrínseco da propagação da luz é o que conhecemos como difração, deste modo algumas das soluções da equação de Helmholtz representará feixes que sentem tal efeito à medida que se propagam. Por exemplo, isso pode ser notado observando a cintura de um dado modo Laguerre-Gauss, pois, de fato, este parâmetro depende da distância de propagação do feixe [5]. Neste caso dizemos que a solução da EH é não exata ou paraxial.

Porém, sob determinadas condições, a EH nos fornecerá soluções que representam feixes que não sentem os efeitos da difração ao longo de suas propagações [6]. Tais soluções podem ser obtidas tanto para luz espacialmente

*Endereço de correspondência: joao.amaral@prof.ce.gov.br

coerente como para parcialmente coerente [7]. Neste caso, dizemos que os feixes de luz representam soluções exatas da EH, e podem ser chamados de feixes não difrativos, feixes não paraxiais ou de feixes invariantes.

Uma característica que tornou os feixes ópticos objetos de interesse para incontáveis pesquisadores é o fato de alguns deles transportarem momento angular orbital (MAO) [5, 6]. Isso os torna ferramentas úteis para se trabalhar com decodificação de informação [8, 9], além da possibilidade de serem usados para aprisionar e manipular micropartículas [10–12].

No cenário específico dos feixes não difrativos que transportam MAO, podemos citar aplicações na área da manipulação óptica, haja vista que, em 2001, J. Arlt et al. demonstraram uma técnica para manipulação óptica de partículas de tamanho micrométrico, incluindo amostras biológicas, usando um feixe Bessel de ordem zero [13]. V. Garcés-Chávez e colaboradores, utilizando a propriedade de auto reconfiguração do feixe Bessel, conseguiram aprisionar e manipular grupos de micropartículas em diferentes planos perpendiculares ao eixo óptico separados de uma certa distância [14].

O exposto até o momento mostra a importância dos Feixes Bessel, pois podem servir de ferramentas em muitas áreas da ciência. Além disso, devido a sua simetria radial, é uma solução da EH razoavelmente fácil de ser obtida. Entretanto, podemos encontrar sistemas físicos os quais não possuem seção transversal com geometria circular. Pensando nisso, no final dos anos de 1990, cientistas da área da óptica dos feixes viram que era preciso dá um passo à frente.

Nesse aspecto, o trabalho de J.C. Gutiérrez-Vega et al. é de grande importância para a literatura científica, pois, no ano 2000, eles encontraram uma nova classe de luz não difrativo que transporta MAO, que passou a ser chamada de Feixes elípticos ou de Mathieu. Eles mostraram que tais feixes eram representados pela solução exata da EH em coordenadas elípticas uma geometria elíptica [15].

A partir da descoberta teórica dos feixes de Mathieu, as pesquisas se voltaram para tentar sua realização experimental. De modo que, nesse sentido, em 2001, alcançou-se um primeiro passo, pois J.C. Gutiérrez-Vega et al. [16], utilizando um arranjo experimental rudimentar, geraram feixes de Mathieu de ordem zero. Em 2002, utilizando hologramas gerados por computador, S. Chávez-Cerda e colaboradores geraram experimentalmente feixes elípticos de alta ordem que transportam MAO [17].

A capacidade de gerar feixes não difrativos com geometria elíptica oferece novas possibilidades em diversas áreas de pesquisas e aplicações. Por exemplo, no ano de 2006, C. López-Mariscal e colaboradores utilizaram feixes de Mathieu para aprisionar e manipular micropartículas a partir da transferência de MAO da luz para esses micro corpos materiais [18].

A partir do exposto até agora, percebe-se que os campos de luz não difrativos e especificamente os feixes

de Mathieu são de grande importância para diversos ramos da ciência. Porém a literatura ainda é didaticamente resumida, em sua grande maioria escrita em inglês e muito restrita a cursos de pós-graduações. Isso acaba diminuindo o acesso desse e, por consequência, não despertando a curiosidade dos estudantes por este conhecimento.

Para quem estuda os feixes de luz, é um fato fácil de verificar que encontrar uma solução da equação de Helmholtz em sistemas de coordenadas que possuam simetria radial acentuada é menos difícil do que para sistema de coordenadas em que isso não ocorre. Por exemplo, é mais fácil uma solução da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas circulares do que em coordenadas cilíndricas elípticas.

Neste sentido, com o intuito de contribuir com a formação de muitos estudantes de Física no Brasil, mostraremos como encontrar uma solução para equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas elípticas. Para isso, manusearemos as equações de Maxwell para encontrarmos a equação de Helmholtz escalar. Em seguida resolveremos a EH em coordenadas cilíndricas elípticas lançando mão do fato que um feixe não difrativo pode ser visto como uma soma de ondas planas.

2. Equação Escalar de Helmholtz

A propagação da luz no espaço livre (vácuo) é equivalente a campos eletromagnéticos propagantes muito distantes das fontes que os gerou. Um feixe óptico consiste em um campo de luz modulado (ou moldado) [4], entretanto a forma como o feixe é esculpido depende da resolução de uma equação diferencial em um sistema de coordenadas específico.

A equação diferencial que descreve a propagação de um feixe óptico é obtida a partir da manipulação das equações de Maxwell no vácuo [19]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1d)$$

com ϵ_0 e μ_0 sendo a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, respectivamente. Além disso, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ é o campo elétrico e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ é o campo indução magnética.

A partir das Equações (1c) e (1d), observa-se que os campos elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e indução magnética $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ estão acoplados. O desacoplamento dos campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ nos fornece equações de onda tanto para $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, quanto para $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ [20]:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2b)$$

As Equações (2a) e (2b) nos dizem que tanto o campo elétrico, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, quanto a indução magnética, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, são ondas que se propagam com uma velocidade dada por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 2,99792 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Todavia, a intensidade do campo elétrico é muito mais evidente que o da indução magnética, uma vez que $E = cB$ [19]. Por isso que é comum representar um campo de luz apenas por $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

Quando se trabalha com campos monocromáticos de frequência de oscilação ω , linearmente polarizados, a manipulação conveniente da Equação (2a) nos proporciona encontrar a equação diferencial que descreve a propagação de um feixe óptico conhecida como equação escalar de Helmholtz [4]:

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + k^2 E(\mathbf{r}) = 0, \quad (3)$$

onde a função escalar $E(\mathbf{r})$ é chamada de amplitude complexa do campo elétrico, e $k = \omega/c$ é o módulo do vetor de onda. A Equação (3) admite solução exata [21] e via aproximação paraxial [22]. O passo a passo detalhado para sair das equações de Maxwell e chegar à equação de Helmholtz pode ser encontrado no artigo intitulado por “Moldando a luz: a física por trás dos feixes ópticos” [4].

Quando se utiliza o conceito de onda paraxial na Equação (3), chaga-se na equação paraxial de Helmholtz cuja solução em coordenadas cartesianas dá origem aos feixes Hermite-Gauss [5], mas quando resolvida em coordenadas cilíndricas, deriva-se os modos Laguerre-Gauss [5].

Uma solução exata da Eq. (3) em coordenadas cilíndricas dá origem aos feixes Bessel [6], mas quando a Eq. (3) é resolvida em coordenadas elípticas, obtém-se os feixes elípticos, também conhecidos como feixes de Mathieu [23]. Além disso, pode-se também resolver a Equação (3) em coordenadas parabólicas para obter os chamados feixes parabólicos [24].

Todos os feixes obtidos a partir da solução exata da equação de Helmholtz são não difrativos [4]. Isso implica que a distribuição de intensidade óptica do campo de luz ao longo da propagação permanece constante, ou seja, $I(\mathbf{r}_t, 0) = I(\mathbf{r}_t, z > 0)$. Portanto, a seguinte forma funcional para $E(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}_t, z)$:

$$E(\mathbf{r}_t, z) = A(\mathbf{r}_t) \exp(i\beta z), \quad (4)$$

é uma solução possível da Equação (3), onde \mathbf{r}_t é o vetor transverso de $E(\mathbf{r})$ e β é uma constante a ser especificada. Aqui é importante salientar que \mathbf{r}_t é um vetor arbitrário, pois em coordenadas cartesianas $\mathbf{r}_t = (x, y)$, em coordenadas cilíndricas $\mathbf{r}_t = (\rho, \phi)$, em coordenadas elípticas $\mathbf{r}_t = (\xi, \phi)$, e em coordenadas parabólicas $\mathbf{r}_t = (\xi, \eta)$.

Há duas maneiras de se obter um feixe não difrativo. A primeira maneira é resolver a Equação (3) pelo método de separação de variáveis (muito exaustivo) em um dado sistema de coordenadas. A segunda maneira (menos exaustiva) é admitindo que um campo óptico pode ser representado por uma superposição de ondas planas [25].

Um campo constituído por uma superposição de ondas planas, à medida que este se propaga, as ondas planas interferem umas com as outras construtiva e destrutivamente. Tal processo de interferências dependem da fase relativa adquirida por cada onda plana na direção de propagação [26].

Entretanto, Hernández-Figueroa et al. mencionam que há superposições em que a fase de cada onda plana muda de forma idêntica, todos os feixes não difrativos têm essa característica [26].

Amaral e Lima afirmam que um feixe não difrativo pode visto como um conjunto de ondas planas de igual amplitude com iguais componentes longitudinais do vetor de onda, k_z , se superpondo [4]. Tais superposições de ondas formam um cone de luz em que o eixo do cone corresponde à direção de propagação de um dado feixe não paraxial. Porém os vetores de onda \mathbf{k} habitam na superfície do cone. Destes modo, os vetores \mathbf{k} podem ser decompostos em componentes transversal, k_t , e longitudinal, k_z , em que $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_t^2 + k_z^2}$.

Para alterar o tipo de feixe que se pretende gerar, deve-se realizar uma alteração nas amplitudes das ondas planas que compõem a superposição. Isso implica que a amplitude das ondas que geram feixes elípticos é diferente das amplitudes das ondas planas que formam os feixes parabólicos, e etc.

O caminho para uma abordagem matemática do que foi exposto até o momento é trilhado a partir da equação de Helmholtz:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E(x, y, z) = 0. \quad (5)$$

É usual escolher o eixo z como a direção de propagação. Isso implica que a onda plana a seguir é solução da Equação (5):

$$E_0(x, y, z) = \exp[ik_z z - ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)], \quad (6)$$

desde que a relação $k^2 = k_t^2 + k_z^2$ seja satisfeita. Onde k_z é o componente longitudinal do vetor de onda e k_t corresponde à componente transversal. A variável ϕ é o ângulo polar do plano transversal onde reside k_t .

A superposição de múltiplas ondas planas para gerar um feixe não difrativo pode ser descrita usando a integral de Whittaker [26]:

$$E(x, y, z) = e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} A(\phi) e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi \quad (7)$$

a qual é solução da equação de Helmholtz [4]. A função complexa $A(\phi)$ define a fase e a amplitude das diferentes ondas planas que se superpõem para formar um feixe não

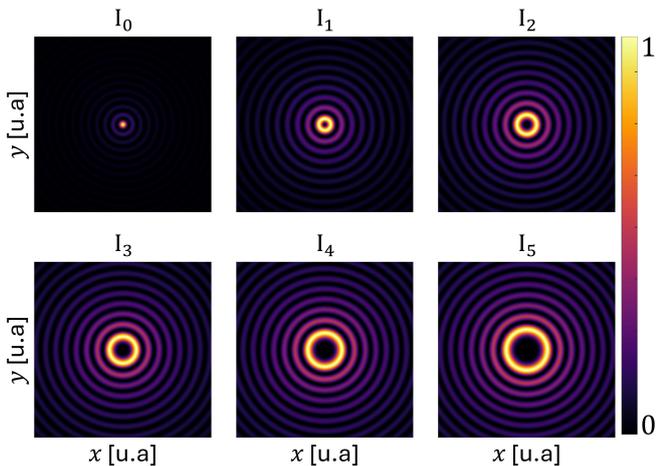


Figura 1: Ilustração dos padrões de intensidade, $I_m(\rho, \phi, z)$, dos Feixes Bessel verificados no plano $z = 0$.

difrativo. O vetor de onda transverso, k_t , reside em um círculo.

Além disso, pode-se afirmar que qualquer função complexa $A(\phi)$ define um feixe não difrativo. Entretanto, a integral de Whittaker só pode ser expressa analiticamente para alguns casos particulares de $A(\phi)$ [26]. Quando $A(\phi) = e^{-im\phi}$, obtém-se a família dos feixes Bessel:

$$E_m(\rho, \phi, z) = A_m J_m(k_t \rho) e^{-im\phi} e^{ik_z z}. \tag{8}$$

cuja distribuição espacial de intensidade é dada por:

$$I_m(\rho, \phi, z) = |A_m|^2 |J_m(k_t \rho)|^2. \tag{9}$$

em que A_m é uma constante. A figura abaixo mostra os padrões de intensidade dos feixes Bessel para diferentes ordens.

A partir da Figura (1), nota-se que os feixes Bessel têm alto grau de simetria radial, pois, do ponto de vista teórico, tem-se um feixe na forma de um cilindro reto se propagando pelo espaço. O perfil transversal deste cilindro, em qualquer ponto do eixo de propagação, é constituído por anéis luminosos concêntricos separados por regiões escuras.

Enfatizamos que todas as simulações numéricas para construção dos padrões de intensidade e de fase dos campos ópticos discutidos ao longo do texto foram realizada com o MATLAB (do inglês Matrix Laboratory), que é um software de computação numérica de análise e visualização de dados. Embora seu nome signifique Laboratório de Matrizes, seus propósitos atualmente são bem mais amplos.

3. Feixes de Mathieu

Iniciamos enfatizando que para um feixe óptico não difrativo, sua distribuição espacial de intensidade óptica ao longo da propagação deve ser constante, ou seja,

$I(\mathbf{r}_t, 0) = I(\mathbf{r}_t, z > 0)$. Isso implica que a solução da Equação (5) procurada deve ter a seguinte forma:

$$E(x, y, z) = U(x, y) \exp ik_z z, \tag{10}$$

onde $U(x, y)$ é a distribuição de amplitude no plano transversal ao eixo de propagação e k_z é o componente z do vetor de onda. Portanto, substituindo Equação (10) na Equação (5) chegamos a seguinte equação:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_t^2 \right) U(x, y) = 0, \tag{11}$$

onde $k_t^2 = k^2 - k_z^2$ é o componente transversal do vetor de onda.

Lembre-se que a tarefa em questão neste artigo é mostrar, de maneira detalhada e didática, como se chega aos feixes de Mathieu. Portanto, deve-se expressar a equação de Helmholtz em coordenadas elípticas. Todavia, a relação entre o sistema de coordenadas cartesiano e o cilíndrico elíptico:

$$\begin{aligned} x &= h \cosh(\xi) \cos(\phi), \\ y &= h \sinh(\xi) \sin(\phi), \\ z &= z, \end{aligned}$$

com $0 \leq \xi < \infty$ e $0 \leq \phi < 2\pi$. A constante h representa a distância focal de uma elipse localizada no plano transversal. Deste modo, tem-se que a transformação $x + iy = h \cosh(\xi + i\phi)$ é satisfeita.

Para expressar a Equação (11) em coordenadas elípticas cilíndricas, deve-se realizar uma transformação de coordenadas. Por outro lado, as equações de Helmholtz em coordenadas cilíndricas elípticas e em coordenadas cartesianas estão conectadas pelo jacobiano J [27]. Deste modo, a equação de Helmholtz neste novo sistema de coordenadas pode ser expressa como [28]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + |J|k_t^2 \right) U(\xi, \phi) = 0. \tag{12}$$

em que J é o determinante da matriz jacobiana, o qual é dado por:

$$J \equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \phi, z)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Agora é só uma questão de realizar as derivadas e calcular um determinante para mostrar que:

$$J = h^2 [\sinh^2 \xi \cos^2 \phi + \cosh^2 \xi \sin^2 \phi].$$

Porém, podemos simplificar essa expressão a partir das seguintes relações trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sinh^2 \xi &= \cosh(2\xi) - \cosh^2 \xi, \\ \sin^2 \phi &= \cos^2 \phi - \cos(2\phi), \\ 2 \cos^2 \phi &= 1 + \cos(2\phi), \\ 2 \cosh^2 \xi &= 1 + \cosh(2\xi). \end{aligned}$$

Fazendo as manipulações algébricas necessárias, encontramos:

$$J = h^2[\cosh(2\xi) - \cos(2\phi)]. \tag{13}$$

Portanto, a equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas elípticas é dada por:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{h^2 k_t^2}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\phi) \right] U(\xi, \phi) = 0. \tag{14}$$

Supondo que a solução admita separação de variáveis, podemos escrever $U(\xi, \phi)$ como um produto de funções que dependem das variáveis ξ e ϕ , ou seja,

$$U(\xi, \phi) = R(\xi)\Phi(\phi). \tag{15}$$

Agora, substituindo a Equação (15) na Equação (14) e em seguida dividindo o resultado por $R(\xi)\Phi(\phi)$, obtemos:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{h^2 k_t^2}{2} [\cosh 2\xi - \cos 2\phi] = 0. \tag{16}$$

Deste modo, a equação de Helmholtz dá origem a duas equações diferenciais ordinárias, em que uma é radial e outra é angular, conhecidas como equações diferenciais de Mathieu [29]:

$$\frac{d^2 R(\xi)}{d\xi^2} - [a - 2q \cosh(2\xi)]R(\xi) = 0, \tag{17}$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + [a - 2q \cos(2\phi)]\Phi(\phi) = 0, \tag{18}$$

onde a quantidade a é uma constante de separação, enquanto que o parâmetro $q = k_t^2 h^2 / 4$ contém informação do vetor de onda transversal e do sistema de coordenadas elípticas.

Neste ponto, é importante relembrar que um feixe não difrativo pode ser visto como uma superposição de múltiplas ondas planas. Desta maneira, para expressar a Equação (7) em coordenadas elípticas, iremos manipular o argumento da exponencial, $k_t(x \cos \phi + y \sin \phi)$. Note que podemos escrever $x = \rho \cos \phi$ e $y = \rho \sin \phi$, de modo que:

$$k_t(x \cos \phi + y \sin \phi) = k_t \rho \cos(\phi - \phi). \tag{19}$$

em que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

A partir da relação na Equação (19), observe que podemos proceder da seguinte maneira:

$$k_t \rho = k_t \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Lembrando que em coordenadas elípticas $x = h \cosh \xi \cos \phi$ e $y = h \sinh \xi \sin \phi$, então, tem-se que

$$k_t \rho = k_t h \sqrt{\cosh^2 \xi \cos^2 \phi + \sinh^2 \xi \sin^2 \phi}.$$

Porém, sabe-se que $\sinh^2 \xi = \cosh^2 \xi - 1$ e $\cos^2 \phi = 1 - \sin^2 \phi$. Portanto:

$$\begin{aligned} k_t \rho &= k_t h \sqrt{\cosh^2 \xi (1 - \sin^2 \phi) + (\cosh^2 \xi - 1) \sin^2 \phi} \\ &= k_t h \sqrt{\cosh^2 \xi - \sin^2 \phi}, \end{aligned} \tag{20}$$

onde $\phi = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(\tanh \xi \tan \phi)$. Sabe-se também que o parâmetro q está relacionado com k_t e h , de maneira que podemos escrever $k_t h = 2\sqrt{q}$, isso implica que podemos definir uma nova variável χ da seguinte forma:

$$\chi \equiv k_t \rho = 2\sqrt{q} \sqrt{\cosh^2 \xi - \sin^2 \phi}. \tag{21}$$

Portanto, lançando mão das Equações (21) e (19), podemos escrever a Equação (7), em função das coordenadas elípticas, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} U(\xi, \phi) &= \int_0^{2\pi} A(\phi') [\cos(\chi \cos(\phi' - \phi)) \\ &\quad + i \sin(\chi \cos(\phi' - \phi))] d\phi', \end{aligned} \tag{22}$$

onde usamos a propriedade $\exp[i\theta] = \cos \theta + i \sin \theta$.

Assim, para o caso do sistema de coordenadas elípticas, o espectro angular, $A(\phi')$, é encontrado ao resolver a Equação (22), a qual pode ter quatro soluções conhecidas como funções angulares de Mathieu. As duas primeiras delas são:

$$ce_{2m}(\phi', q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}(q) \cos(2m\phi'), \tag{23}$$

com periodicidade π , e

$$ce_{2m+1}(\phi', q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}(q) \cos[(2m+1)\phi'], \tag{24}$$

com periodicidade 2π . As funções $ce_{2m}(\phi', q)$ e $ce_{2m+1}(\phi', q)$ possuem paridade par. As outras duas soluções são:

$$se_{2m+2}(\phi', q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+2}(q) \sin[(2m+2)\phi'], \tag{25}$$

com periodicidade π , e

$$se_{2m+1}(\phi', q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}(q) \sin[(2m+1)\phi'], \tag{26}$$

com periodicidade 2π . As funções $se_{2m+2}(\phi', q)$ e $se_{2m+1}(\phi', q)$ apresentam paridade ímpar. Desta maneira, percebe-se que $A(\phi')$ pode assumir quatro diferentes formas. As quatro funções de Mathieu angulares são válidas para qualquer valor de m , ou seja, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Quando falamos em paridade de funções, estamos a analisar se a função é par ou ímpar. Uma dada função $f(x)$

é dita ser par se $f(x) = f(-x)$. Por outro lado, uma função $g(x)$ será ímpar se $g(-x) = -g(x)$. Acreditamos que a partir de agora o leitor que ainda não entendia o que significa o termo “paridade de uma função” passa a compreender.

A partir de agora, passa-se a verificar qual será a forma funcional de $U(\xi, \phi)$ para cada uma dessas quatro situações.

3.1. Amplitude $U(\xi, \phi)$ para funções de Mathieu de período π

Iniciamos com o caso em que o espectro angular assume a forma da função de Mathieu par (e = even) de período π , ou seja, $A(\phi') = ce_{2m}(\phi', q)$:

$$U_m^e(\xi, \phi) = \int_0^{2\pi} \cos[\chi \cos(\phi' - \phi)] ce_{2m}(\phi', q) d\phi' + i \int_0^{2\pi} \sin[\chi \cos(\phi' - \phi)] ce_{2m}(\phi, q) d\phi'. \tag{27}$$

A literatura [30] mostra que a solução das integrais na Equação (27) se dão a partir das seguintes relações:

$$\int_0^{2\pi} \cos[\chi \cos(\phi' - \phi)] ce_{2m}(\phi', q) d\phi' = \frac{2\pi A_0(q) [Ce_{2m}(\xi, q) ce_{2m}(\phi, q)]}{ce_{2m}(0, q) ce_{2m}(\pi/2, q)}, \tag{28}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin[\chi \cos(\phi' - \phi)] ce_{2m}(\phi, q) d\phi' = 0, \tag{29}$$

isso implica que

$$U_m^e(\xi, \phi) = \frac{2\pi A_0(q) [Ce_{2m}(\xi, q) ce_{2m}(\phi, q)]}{ce_{2m}(0, q) ce_{2m}(\pi/2, q)}. \tag{30}$$

Quando $A(\phi') = se_{2m+2}(\phi', q)$, tem-se que a integral de Whittaker dá origem a um campo que depende de uma função de Mathieu ímpar (o = odd) de período π :

$$U_m^o(\xi, \phi) = \int_0^{2\pi} \cos[\chi \cos(\phi' - \phi)] se_{2m+2}(\phi', q) d\phi' + i \int_0^{2\pi} \sin[\chi \cos(\phi' - \phi)] se_{2m+2}(\phi, q) d\phi'. \tag{31}$$

Novamente, lança-se mão da literatura [30] para verificar que:

$$\int_0^{2\pi} \cos[\chi \cos(\phi' - \phi)] se_{2m+2}(\phi', q) d\phi' = \frac{2\pi q B_2(q) [Se_{2m+2}(\xi, q) se_{2m+2}(\phi, q)]}{se_{2m+2}(0, q) se_{2m+2}(\pi/2, q)}, \tag{32}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin[\chi \cos(\phi' - \phi)] se_{2m+2}(\phi, q) d\phi' = 0. \tag{33}$$

Deste modo, temos que

$$U_m^o(\xi, \phi) = \frac{2\pi q B_2(q) [Se_{2m+2}(\xi, q) se_{2m+2}(\phi, q)]}{se_{2m+2}(0, q) se_{2m+2}(\pi/2, q)}. \tag{34}$$

Mais adiante ficará claro que tanto a equação (30) quanto a Equação (34) (uma ou outra) podem representar a parte real da família de feixes de Mathieu. É usual buscar uma expressão, esteticamente agradável de se analisar e pouco carregada de termos, para representar o feixe de ordem zero. A partir dos resultados encontrados até agora, verifica-se que a forma funcional para o feixe de Mathieu de ordem zero, em qualquer ponto do eixo z , é dada por:

$$E_0(\xi, \phi, z) = ACe_0(\xi, q) ce_0(\phi, q) \exp(ik_z z), \tag{35}$$

onde A é uma constante.

A Figura (2) mostra os padrões de intensidade e de fase dos feixes de Mathieu de ordem zero para diversos valores de q . Ao observar a Figura (2) com atenção notamos que a distribuição de fase de cada feixe não contém singularidade, independentemente do valor de q . Isso implica que os feixes de elípticos de Mathieu não transportam momento angular orbital, como era de se esperar.

Na Figura (2), a partir dos padrões espaciais de fase, também conseguimos observar o comportamento dos feixes de Mathieu de ordem zero quando se altera o valor de q . Observe que à medida que aumentamos q , isso equivale a aumentar a distância inter focal das elipses correspondentes, e conseqüente aumento de suas elipticidades.

Além disso, ainda se referindo à Figura (2), observe que à medida que a elipticidade dos feixes aumentam, o padrões de intensidades tendem a se tornar retangulares.

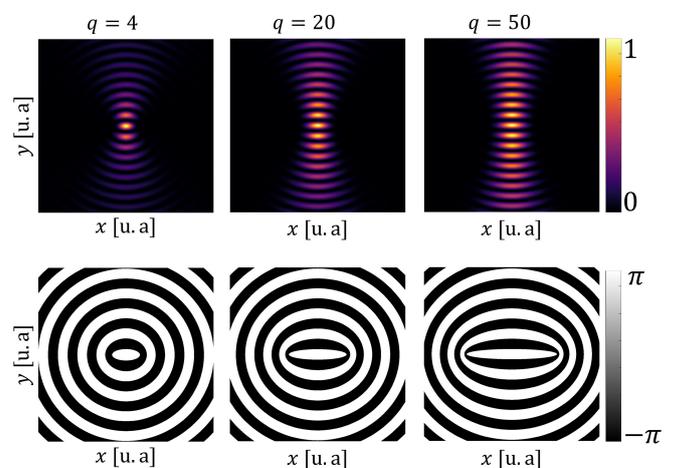


Figura 2: Ilustração dos padrões de intensidade, $I_0 = |E_0(\xi, \phi, z)|^2$, e de fase dos feixes de Mathieu para diferentes valores de q . Feixes não difrativos ideais possuem extensão espacial infinita, por isso a escala de medida espacial é arbitrária [u.a].

3.2. Amplitude $U(\xi, \phi)$ para funções de Mathieu de período 2π :

Para as funções angulares de Mathieu de periodicidade 2π , temos a função par $ce_{2m+1}(\phi', q)$. Deste modo, assumindo que $A(\phi') = ce_{2m+1}(\phi', q)$, a Equação (22) assume a seguinte forma:

$$U_m^e(\xi, \phi) = \int_0^{2\pi} \cos[\chi \cos(\phi' - \phi)] ce_{2m+1}(\phi', q) d\phi' + i \int_0^{2\pi} \sin[\chi \cos(\phi' - \phi)] ce_{2m+1}(\phi, q) d\phi'. \tag{36}$$

Mais uma vez, revisita-se as tabelas de integrais de Gradshteyn [30] para constatar que:

$$\int_0^{2\pi} \cos[\chi \cos(\phi' - \phi)] ce_{2m+1}(\phi', q) d\phi' = 0, \tag{37}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin[\chi \cos(\phi' - \phi)] ce_{2m+1}(\phi', q) d\phi' = -\frac{2\pi\sqrt{q}A_1(q)[Ce_{2m+1}(\xi, q)ce_{2m+1}(\phi, q)]}{ce_{2m+1}(0, q)ce'_{2m+1}(\pi/2, q)}. \tag{38}$$

Este resultado nos leva a concluir que

$$U_m^e(\xi, \phi) = -i \frac{2\pi\sqrt{q}A_1(q)[Ce_{2m+1}(\xi, q)ce_{2m+1}(\phi, q)]}{ce_{2m+1}(0, q)ce_{2m+1}(\pi/2, q)}. \tag{39}$$

Finalmente, quando $A(\phi') = se_{2m+1}(\phi', q)$, que é uma função ímpar (o = odd), tem-se que:

$$U_m^o(\xi, \phi) = \int_0^{2\pi} \cos[\chi \cos(\phi' - \phi)] se_{2m+1}(\phi', q) d\phi' + i \int_0^{2\pi} \sin[\chi \cos(\phi' - \phi)] se_{2m+1}(\phi, q) d\phi'. \tag{40}$$

As tabelas de integrais de Gradshteyn et al. nos mostra que:

$$\int_0^{2\pi} \cos[\chi \cos(\phi' - \phi)] se_{2m+1}(\phi', q) d\phi' = 0, \tag{41}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin[\chi \cos(\phi' - \phi)] ce_{2m+1}(\phi', q) d\phi' = \frac{2\pi\sqrt{q}B_1(q)[Se_{2m+1}(\xi, q)se_{2m+1}(\phi, q)]}{se_{2m+1}(0, q)se_{2m+1}(\pi/2, q)}. \tag{42}$$

Deste modo, pode-se escrever a Equação (40) da seguinte maneira:

$$U_m^o(\xi, \phi) = i \frac{2\pi\sqrt{q}B_1(q)[Se_{2m+1}(\xi, q)se_{2m+1}(\phi, q)]}{se_{2m+1}(0, q)se_{2m+1}(\pi/2, q)}. \tag{43}$$

Os coeficientes $A_0(q)$, $B_2(q)$, $A_1(q)$ e B_1 , além de serem funções de q , suas formas funcionais também dependem do valor de m . A respeito da forma funcional dos coeficientes, pode-se ver mais detalhes na referência [31].

As funções $Se(\xi, q)$ e $Ce(\xi, q)$ são soluções da equação radial de Mathieu, estas são conhecidas como funções de Mathieu radiais. Tais funções podem ser encontradas na literatura [32] como:

$$Ce_{2m}(\xi, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}(q) \cosh(2m\xi), \tag{44a}$$

$$Ce_{2m+1}(\xi, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}(q) \cosh[(2m + 1)\xi], \tag{44b}$$

$$Se_{2m+2}(\xi, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+2}(q) \sinh[(2m + 2)\xi], \tag{44c}$$

$$Se_{2m+1}(\xi, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}(q) \sinh[(2m + 1)\xi]. \tag{44d}$$

Todavia, lembre-se que $\sin(iz) = \sinh(z)$ e $\cos(iz) = \cosh(z)$. Deste modo, é fácil perceber que as funções radiais de Mathieu surgem das funções angulares quando é assumido que $\phi = i\xi$. Portanto, no que diz respeito a paridade e periodicidade, as funções de Mathieu radiais possuem a mesmas características das funções angulares.

Uma forma interessante de representar os feixes de Mathieu foi achada por Sabino et al. ao demonstrarem a existência de vórtices elípticos [33]. Eles construíram uma expressão que representa os feixes de Mathieu em uma forma generalizada. Ou seja, uma expressão que contém as soluções pares e ímpares. Esta solução é obtida considerando uma combinação adequada entre o produto das funções radiais e angulares, de maneira que a estrutura característica dos feixes elípticos é preservada:

$$E(\xi, \phi, z) = [A_m(q)Ce_m(\xi, q)ce_m(\phi, q) + iB_m(q)Se_m(\xi, q)se_m(\phi, q)] \exp(ik_z z). \tag{45}$$

Com essa estrutura, os cientistas da referência [33] ainda mencionam que a parte real dos feixes de Mathieu é válida para $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, mas a parte imaginária só é válida para $m = 1, 2, 3, \dots$, fato que explica o motivo da escolha da Equação (35) para representar o feixe elíptico de ordem zero.

Na Figura (3) mostramos ao leitor padrões de intensidade dos feixes de Mathieu de alta ordem ($m > 0$) para diferentes valores de m com diversos valores para o parâmetro q .

Uma análise da Figura (3) nos mostra duas tendências dos feixes elípticos de alta ordem. Quando se fixa m e atribuímos valores cada vez maiores para q , nota-se que a elipticidade da distribuição espacial de intensidade transversal aumenta. Por outro lado, para um dado m

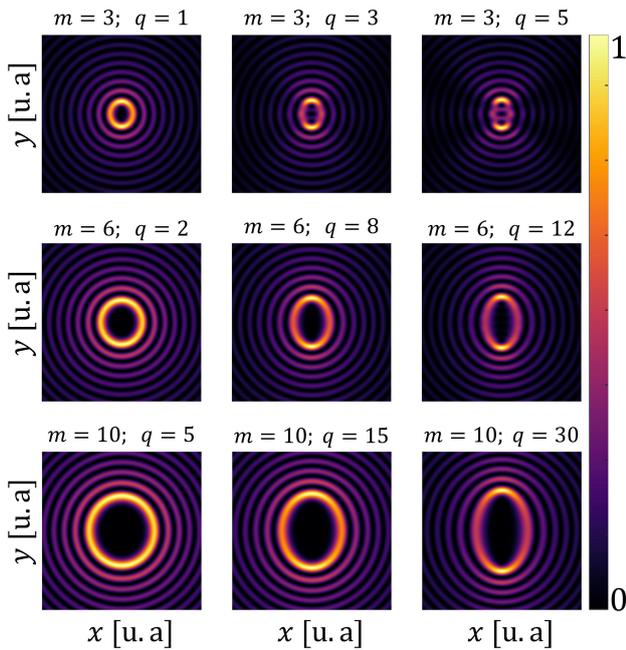


Figura 3: Ilustração dos padrões de intensidade, $I_m = |E_m(\xi, \phi, z)|^2$, dos feixes de Mathieu para diferente valores de m e q .

fixo, quando observamos a diminuição dos valores de q , notamos que o feixe tende a se tornar circular.

Mas feixe não difrativo com geometria circular são os modos Bessel. Surge, então, a seguinte questão: há uma relação entre os feixes de Mathieu e a famílias de feixes Bessel? Para responder a esta pergunta, vamos construir a Figura (4), a qual exibirá padrões de intensidade e fase para diferentes valores de m , mas com $q = 0$. A partir da Figura (4), constatamos que, quando tomamos $q = 0$, os feixes de Mathieu deixam de ser elípticos e passam a ser circulares, ou seja, com obtemos padrões de intensidade dos feixes Bessel usando uma solução das equações de

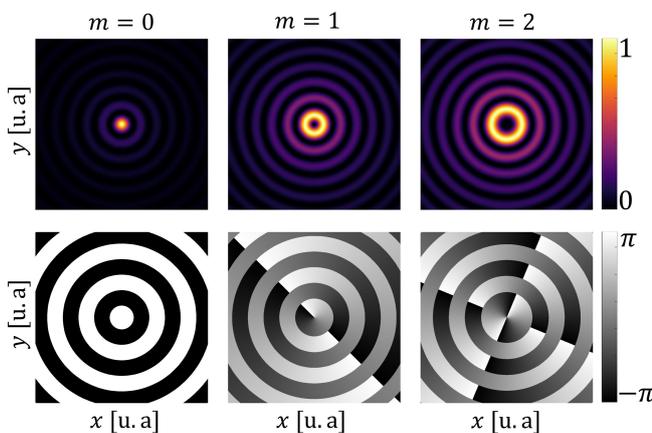


Figura 4: Ilustração dos padrões de intensidade, $I_m = |E_m(\xi, \phi, z)|^2$, e de fase dos feixes de Mathieu para diferente valores de $q = 0$.

Mathieu. Isso implica que os modos Bessel é uma classe particular dos feixes de Mathieu.

Já é conhecido na literatura que muitos dos feixes que transportam momento angular orbital (MAO) têm uma dependência de fase do tipo $\exp(im\phi)$ [5, 6]. Tais feixes são muitas vezes chamados de vórtices óptico, pois em planos transversais ao eixo de propagação apresentam pontos onde a amplitude do campo luminoso é nula, e conseqüentemente nestes pontos a fase do campo é singular [34]. Além disso, a ordem m dos modos luminosos é também chamado de carga topológica.

Uma dúvida que pode surgir é como o leitor, que não tem familiaridade com o estudo dos feixes ópticos, procede para determinar a ordem ou carga topológica de um feixe observando apenas o padrão que mostra a distribuição espacial de fase do mesmo. Preocupados com isso, faremos uma breve explicação a este respeito. Tomaremos como base a Figura (5).

Quando olhamos para a Figura (5), observamos dois padrões que representam a distribuição espacial de fase de uma mesma família de feixes ópticos não difrativo, mas de ordens m diferentes. Os padrões nos dizem que os dois feixes correspondentes transportam momento angular orbital, pois ambos apresentam uma singularidade de fase em seus centros (pontos onde não conseguimos distinguir a cor). Soma-se a isso o fato de a carga topológica (ou ordem) de um feixe ter uma forte relação com a singularidade em sua fase.

Por exemplo, a Figura (5.A) mostra que há uma singularidade de fase no centro do padrão. Imagine que o caro leitor percorre o entorno da singularidade, a partir do ponto de menor valor do ângulo de fase, $-\pi$, no sentido anti-horário. É intuitivo e verdadeiro pensar que a trajetória descrita será uma circunferência e ao longo dessa trajetória circular será encontrado valores do ângulo de fase que variam de $-\pi$ (de onde o leitor partiu) a π (onde o leitor chegou), observe a barra de cores. Neste caso dizemos que a carga topológica do feixe é $m = 1$.

Fazendo o mesmo procedimento para a Figura (5.B), o leitor descreverá a mesma trajetória circular, mas agora

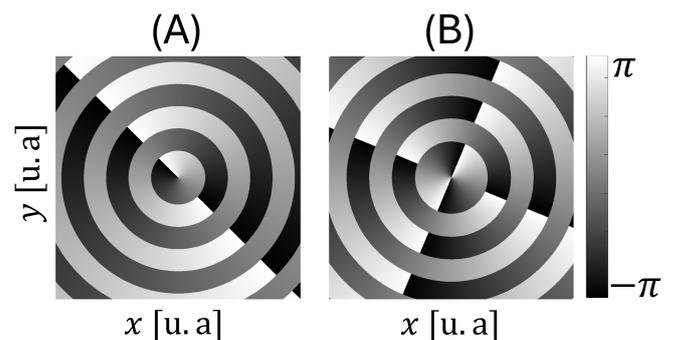


Figura 5: Padrões que exibem a distribuição espacial da fase de um feixe óptico não difrativo de quem supomos não conhecermos a ordem.

ele perceberá que os valores do ângulo de fase variam duas vezes de $-\pi$ a π , logo, a carga topológica do feixe é $m = 2$. E assim por diante para outros valores de m .

Neste momento fazemos o seguinte questionamento: os feixes de Mathieu de alta ordem, para $q \neq 0$, possuem momento angular orbital? O comportamento da fase dos feixes elípticos é semelhante aos de geometria circular? Na Figura (4), mostramos que os feixes Bessel são uma classe particular dos modos de Mathieu para $q = 0$. Como os feixes Bessel de alta ordem transportam MAO, pois observamos singularidade em seus padrões de fase. Logo, somos levados a pensar que os feixes de Mathieu, para $q \neq 0$, de alta ordem também possuem MAO. Tal predição é confirmada quando analisamos a Figura (6).

Observe que, na coluna (A) da Figura (6), no padrão de fase há apenas uma singularidade, e no entorno da mesma os valores do ângulo de fase variam de $-\pi$ a π . Portanto, feixe possui carga topológica $m = 1$. Observando o padrão de fase da coluna (B) da Figura (6) três singularidades de fase, sendo que no entorno de cada uma delas o ângulo de fase varia de $-\pi$ a π . Isso implica que a ordem do feixe é $m = 3$. Similarmente, conclui-se que o feixe de Mathieu da coluna (C) da Figura (6) tem carga topológica $m = 4$.

A Figura (6) nos mostra que os Feixes de Mathieu de alta ordem possuem momento angular orbital, pois em todos os padrões de fase observamos singularidade. Porém o comportamento das singularidades de fase se difere daquelas dos feixes Bessel.

Nos Feixes Bessel de ordem $m > 1$, a singularidade é observada no centro do campo óptico, e a ordem do feixe é determinada observando quantas variações de $-\pi$ a π no entorno do ponto singular. Já para os modos de Mathieu os feixes com ordem $m > 1$, nota-se várias singularidades de fase, no entorno das quais os valores do ângulo de fase variam de $-\pi$ a π uma única vez, de

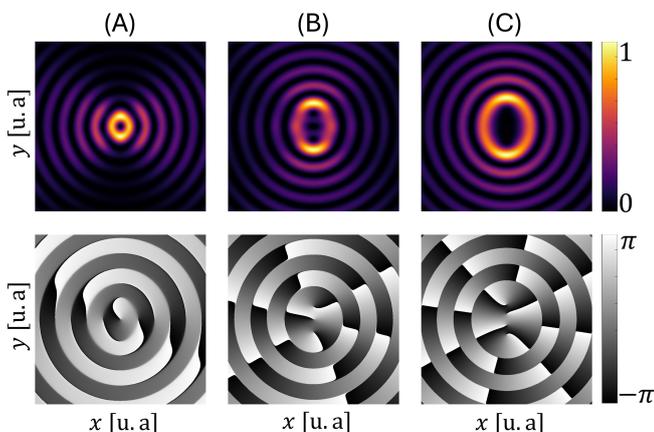


Figura 6: Nas colunas (A), (B) e (C) é mostrado os padrões de intensidade, $I_m = |E_m(\xi, \phi, z)|^2$, e a distribuição espacial de fase dos feixes de Mathieu de alta ordem. Em ambos os casos $q = 3$.

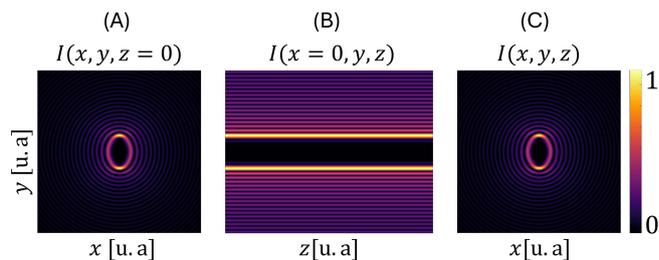


Figura 7: (A) Ilustração do padrão de intensidade de um feixe de Mathieu em $z = 0$; (B) perfil lateral da propagação do feixe; (C) padrão de intensidade em $z > 0$.

modo que a carga topológica de tal feixe é a soma de todas as singularidades.

Uma visualização da não difração dos feixes de Mathieu é melhor entendida analisando o perfil lateral da propagação do mesmo. A Figura (7) mostrada dois instantes da propagação de um feixe elíptico. Na Figura (7.A) é mostrado o padrão de intensidade do feixe em $z = 0$. A Figura (7.B) mostra a visão lateral da propagação do campo luminoso. Já a Na Figura (7.C) mostra seu padrão de intensidade em $z > 0$.

Portanto, a partir da Figura (7), constatamos o caráter não difrativo dos feixes elípticos. Porém, isso só acontece do ponto de vista teórico, no qual um feixe não difrativo é encontrado admitindo que as ondas planas que o compõem têm extensão infinita, o que ocasiona em uma modelo de energia infinita.

Porém, em laboratório não se consegue ondas de extensão infinita. Desta maneira, os feixes de Mathieu experimentais só conseguem se propagar sem sentir os efeitos da difração por uma distância limitada. Isso acontece devido a tamanho limitado das ondas planas que o compõe, quando elas não mais interferem umas com as outras o feixe deixa de existir. Amaral et mostraram que a distância d que um feixe propaga sem difratar é dado pela relação [25]:

$$d = \frac{Lk}{2k_t}, \tag{46}$$

em que L é o lado de uma região quadrada onde as ondas planas são geradas em $z = 0$.

Na Figura (8) é mostrado dois momentos da propagação de um feixe de Mathieu gerado em uma região quadrada de lado 1,6 mm. A Figura (8) é formada por duas linhas. Tanto na primeira linha quanto na segunda os feixes têm os mesmos parâmetros (m e q), mudamos apenas as componentes transversal do vetor de onda. Na primeira linha o feixe possui $k_t = 5\pi \text{ mm}^{-1}$, na segunda linha adotamos $k_t = 6\pi \text{ mm}^{-1}$.

Olhando para a Figura (8), nota-se que o feixe elíptico com $k_t = 5\pi \text{ mm}^{-1}$ se propaga de uma distância maior do que aquele de $k_t = 6\pi \text{ mm}^{-1}$. Note que este fato está de acordo com a Eq. (46). Observe também que o perfil lateral da propagação dos feixes nos mostra que

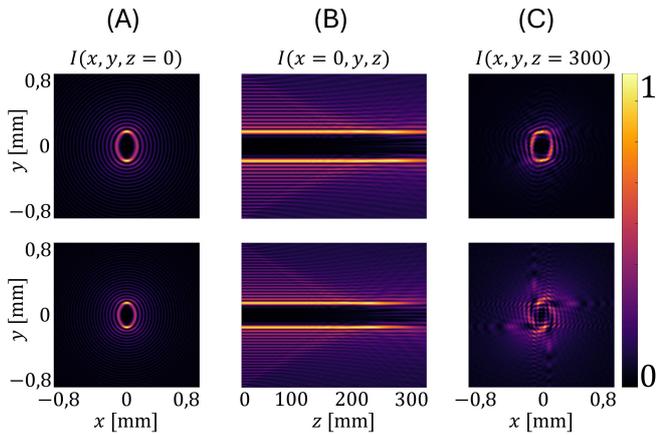


Figura 8: Na primeira linha da figura é mostrado o padrão de intensidade em $z = 0$, o perfil lateral da propagação de $z = 0$ a $z = 300$ mm, e o padrão de intensidade em $z = 300$ para $k_t = 5\pi \text{ mm}^{-1}$. Na segunda linha mostramos a mesma sequência, mas para um feixe com $k_t = 6\pi \text{ mm}^{-1}$. Em ambos os casos os feixes elípticos têm mesma ordem e mesmo parâmetro q .

3.3. Geração experimental dos feixes de Mathieu

O leitor curioso pode fazer a seguinte pergunta: como são gerados, experimentalmente, os feixes de Mathieu? Atualmente a maneira mais usual de se gerar feixes ópticos em laboratórios é gravando as informações de amplitude e de fase de um campo óptico em holograma gerado por computador (HGP) [35]. O holograma deve ser enviado eletronicamente a um modulador espacial de luz (MEL) como uma fase $h(x,y) = \exp(i\psi(a, \varphi))$, onde $a(x, y)$ e $\varphi(x, y)$ são a amplitude e o ângulo de fase de um campo óptico arbitrário.

Especificamente para feixes não difrativos, a primeira realização experimental foi feita por Durnin et al., em 1987. Eles iluminaram uma fenda circular com ondas planas colimadas, e em seguiu captaram a luz advinda da fenda com uma lente colocada a uma distância de um comprimento focal da abertura. Desta maneira conseguiram gerar feixes Bessel de ordem zero [36].

Há também um dispositivo chamado de axicon utilizado para geração de campos Bessel [37]. O axicon é um elemento óptico composto por um conjunto de anéis concêntricos cuja altura varia azimutalmente e que, por meio da variação de seus parâmetros físicos e geométricos – índice de refração, altura, período, espessura das paredes – é capaz de converter feixes Gaussianos em feixes Bessel de altas ordens [38].

Ressalta-se que para os feixes elípticos, além de serem produzidos experimentalmente por HGP, sua primeira geração experimental foi conseguida por Gutiérrez-Vega et al [39]. Eles lançaram mão do mesmo sistema óptico utilizado por Durnin, porém, a iluminação da fenda foi realizada por um feixe gaussiano unidimensional, como mostra a Figura (9). Desta maneira, eles conseguiram gerar em laboratório feixes de Mathieu de ordem zero.

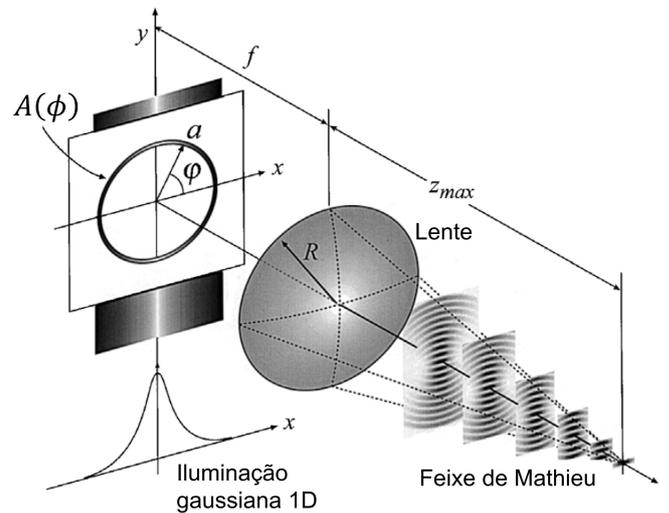


Figura 9: Configuração experimental para a geração de feixes de Mathieu de ordem zero a partir da iluminação de uma fenda circular por um feixe gaussiano unidimensional. Figura retirada e adaptada do trabalho J.C. Gutiérrez-Vega et al., 2001, pg. 38, [39].

O feixe gaussiano unidimensional consiste em um padrão bidimensional, mas que a variação gaussiana se dá apenas em uma direção.

4. Conclusão

Neste trabalho, através de uma revisão histórica sobre os campos de luz não difrativos e especificamente sobre os feixes de Mathieu, mostramos ao leitor a importância dos feixes elípticos, pois os mesmos são potencialmente utilizados em técnicas de aprisionamento e manipulação de micro corpos, codificação e decodificação de informação no cenário clássico e quântico, e ect.

Partindo da equação de Helmholtz, mostramos de maneira detalhada e didática o caminho que deve ser trilhado para encontrar os feixes de Mathieu. A partir de simulação numérica, construímos os padrões de intensidade e de fase dos modos de Mathieu, deixando claro para o leitor os aspectos da geometria elíptica na distribuição espacial da luz.

A partir da Figura (3), mostramos que o parâmetro físico q é o responsável pelo controle da elipticidade do feixe. Além disso, analisando a Figura (4), concluímos que os feixes de Mathieu tornam-se feixes Bessel quando o parâmetro q tende a zero. Analisando as Figuras (5) e (6), também evidenciamos como determinar a ordem ou carga topológica de um feixe elíptico.

Com as Figuras (7) e (8), expressamos o fato de os feixes de Mathieu só serem não difrativos do ponto de vista teórico, pois, na prática, tais feixes se propagam sem sentir o efeito da difração por uma distância limitada. Enfatizamos também os meios pelos quais se pode gerar feixes elípticos experimentalmente.

Referências

- [1] A. Jonáš e P. Zemanek, *Electrophoresis* **29**, 4813 (2008).
- [2] A. Ashkin e J.M. Dziedzic, *Science* **235**, 1517 (1987).
- [3] E. Stellamanns, S. Uppaluri, A. Hochstetter, N. Heddergott, M. Engstler e T. Pfohl, *Scientific Reports* **4**, 6515 (2014).
- [4] J.P. Amaral e C.H.M. Lima, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **43**, e20210327 (2021).
- [5] L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw e J.P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **45**, 8185 (1992).
- [6] J. Durnin, *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 651 (1987).
- [7] J.G.M. Nascimento Neto, E.J.S. Fonseca e A.J. Jesus-Silva, *Phys. Rev. A* **106**, 053519 (2022).
- [8] J.P. Torres, Y. Deyanova, L. Torner e G. Molina-Terriza, *Phys. Rev. A* **67**, 052313 (2003).
- [9] G. Gibson, J. Courtial, M.J. Padgett, M. Vasnetsov, V. Pas'ko, S.M. Barnett e S. Franke-Arnold, *Opt. Express* **12**, 5448 (2004).
- [10] N.B. Simpson, K. Dholakia, L. Allen e M.J. Padgett, *Opt. Lett.* **22**, 52 (1997).
- [11] M.E.J. Friese, J. Enger, H. Rubinsztein-Dunlop, N.R. Heckenberg, *Phys. Rev. A* **54**, 1593 (1996).
- [12] L. Paterson, M.P. MacDonald, J. Arlt, W. Sibbett, P.E. Bryant e K. Dholakia, *Science* **292**, 912 (2001).
- [13] J. Arlt, V. Garcés-Chavez, W. Sibbett e K. Dholakia, *Optics Communications* **197**, 239 (2001).
- [14] V. Garcés-Chávez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett e K. Dholakia, *Nature* **419**, 145 (2002).
- [15] J.C. Gutiérrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo e S. Chávez-Cerda, *Opt. Lett.* **25**, 1493 (2000).
- [16] J.C. Gutiérrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo, G.A. Ramirez, E. Tepichin, R.M. Rodríguez-Dagnino, S. Chávez-Cerda e G.H.C. New, *Optics Communications* **195**, 35 (2001).
- [17] S. Chávez-Cerda, M.J. Padgett, I. Allison, G.H.C. New, J.C. Gutiérrez-Vega, A.T. O'Neil, I. MacVicar e J. Courtial, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **4**, S52 (2002).
- [18] C. López-Mariscal, J.C. Gutiérrez-Vega, G. Milne e K. Dholakia, *Opt. Express* **14**, 4182 (2006).
- [19] M. Born, E. Wolf, A.B. Bhatia, P.C. Clemmow, D. Gabor, A.R. Stokes, A.M. Taylor, P.A. Wayman e W.L. Wilcock, *Principles of Optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light* (Pergamon Press, Oxford, 1970), v. 4.
- [20] J.D. Jackson, *Classical electrodynamics* (Wiley, Berkeley, 1999), 3 ed.
- [21] Z. Bouchal, *Czechoslovak Journal of Physics* **53**, 537 (2003).
- [22] B.E.A. Saleh, M.C. Teich e B.E. Saleh, *Fundamentals of photonics* (Wiley, New York, 1991), v. 22.
- [23] J.C. Gutiérrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo, S. Chávez-Cerda, *Optics Letters* **25**, 1493 (2000).
- [24] M.A. Bandres, J.C. Gutiérrez-Vega e S. Chávez-Cerda, *Optics Letters* **29**, 44 (2004).
- [25] J.P. Amaral, J.C.A. Rocha, E.J.S. Fonseca e A.J. Jesus-Silva, *Applied Optics* **58**, 3659 (2019).
- [26] H.E. Hernández-Figueroa, M. Zamboni-Rached e E. Recami (ed.), *Non-diffracting waves* (John Wiley & Sons, New York, 2013).
- [27] I. Julián-Macías, C. Rickenstorff-Parrao, O.J. Cabrera-Rosas, E. Espíndola-Ramos, S.A. Juárez-Reyes, P. Ortega-Vidals, G. Silva-Ortigoza e C.T. Sosa-Sánchez, *J. Opt. Soc. Am. A* **35**, 267 (2018).
- [28] J.C. Gutiérrez-Vega, R.M. Rodríguez-Dagnino, M.D.I. Castillo e S. Chavez-Cerda, *Optical Pulse and Beam Propagation III* **4271**, 73 (2001).
- [29] Y. Zhang, M.R. Belić, J. Sun, H. Zheng, H. Chen, C. Li, Z. Wang e Y. Zhang, *Europhysics Letters* **107**, 34001 (2014).
- [30] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products* (Academic Press, London, 2014).
- [31] J.C.S. Pinto, *Radiação acustica de cascas cilíndricas elípticas*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis (1995).
- [32] N.W. McLachlan, *Theory and application of Mathieu functions* (Clarendon Press, London, 1947).
- [33] S. Chávez-Cerda, J.C. Gutiérrez-Vega e G.H.C. New, *Optics Letters* **26**, 1803 (2001).
- [34] G.J. Gbur, *Singular optics* (CRC Press, Boca Raton, 2016).
- [35] V. Arrizón, U. Ruiz, R. Carrada e L.A. González, *J. Opt. Soc. Am.* **24**, 3500 (2007).
- [36] J. Durnin, J.J. Miceli e J.H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1499 (1987).
- [37] S. Monk, J. Arlt, D.A. Robertson, J. Courtial e M.J. Padgett, *Optics Communications* **170**, 213 (1999).
- [38] J.M. Oliveira, *Microfabricação de dispositivos ópticos integrados por meio de escrita direta a laser*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Alagoas, Maceió (2023).
- [39] J.C. Gutiérrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo, G.A. Ramirez, E. Tepichin, R.M. Rodríguez-Dagnino, S. Chávez-Cerda e G.H.C. New, *Optics Communications* **195**, 35 (2001).